SOLUCIONARIO DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI 2010 – II
MATEMÁTICA

1. Resolución:

$\overline{abcde}\cdot 99 = ...18828$

$\overline{abcde}\cdot(100-1) = ...18828$

$\overline{abcde}00 - \overline{abcde} = ...18828$

$...18828+$

$\overline{18372}$

$\overline{abcde}$

18372

$\overline{abcde00}$

Con las cifras de $\overline{abcde}$ se formara el mayor y menor numero posible

$mayor \to 87321-$

$menor \to \underline{12378}$

74943

CLAVE: C

2. Resolución:

Tasa ≡ 10% bimestral ≡ 20% cuatrimestral capitalizable cuatrimestralmente

Sabemos que: monto = capital $(1+\text{tasa})^{\#\,periodos}$

Se quiere aumentar el capital en 72,8%

$1,728C = Cx(1+20\%)^n$

$(1,2)^3 x \cancel{C} = \cancel{C}x(1,2)^n$

n = 3 cuatrimestres

n = 12 meses

CLAVE: E

3. Resolución:

$\frac{n}{13} < 0.15\widehat{45} < \frac{n+1}{13}$

Multiplicando por 13 a todo tendríamos

$\underbrace{n}_{2} < 2,0090... < \underbrace{n+1}_{3}$

$\therefore$ menor de las fracciones es $\frac{2}{13}$

CLAVE: A

4. Resolución:

8 personas
10 días
8 horas/ diarias

½	½
5 días	2 días
8 personas	(8+n) personas
8h/d	10h/d

Como ambas partes son las mismas entonces:

$8\times 8\times 5 = 2\times(8+n)\times 10$

$n=8$

CLAVE: A

5. Resolución:

$f, g\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f(x)=|x-2|+2 \ \wedge\ g(x)=-(x^2+2)$

De las siguientes reglas de correspondencia, se observa que:

$Domf=\mathbb{R} \ \wedge\ Domg=\mathbb{R}\to Dom(f+g)=\mathbb{R}$

Para f:

$$f(x)=\begin{cases} x & ; x\ge 2 \\ 4-x & ; x<2 \end{cases}$$

Hallamos $(f+g)$:

$$(f+g)(x)=\begin{cases} -x^2+x-2\ ; x\ge 2 \\ -x^2-x+2;\ x<2 \end{cases}$$

o equivalente:

$$(f+g)(x)=\begin{cases} -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4} \\ -\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4} \end{cases}$$

CLAVE: A

6. Resolución:

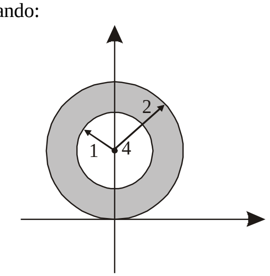
Sean los complejos:

$Z=x+yi \ \wedge\ u=\sqrt{x}+yi,\ x\ge 0$ y los complejos:

$A=\left\{Z/1\le\left|\overline{Z}+4i\right|\le 2\right\}$

$1\le\sqrt{x^2+(y-4)^2}\le 2\to 1^2\le x^2+(y-4)^2\le 2^2$

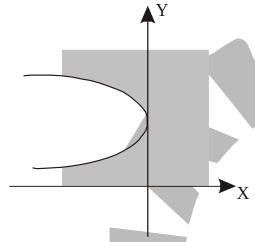
Graficando:



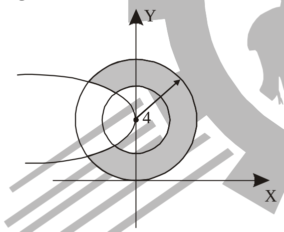
$B=\left\{u=\sqrt{x}-yu/\left|u+4i\right|\ge 0\right\}$ V

$\sqrt{\sqrt{x}^2+(y-4)^2}\ge 0\to x\ge-(y-4)^2$

Graficando:



Piden la grafica de $A\cap B$



CLAVE: B

7. Resolución:

Piden graficar $f(x)=\log(|x|+1)+\log(|x|-1)$

Se nota que la funcion es par, puesto que: $f(-x)=f(x)$

1° graficamos para $x>1$

$f(x)=\log(x+1)+\log(x-1)$

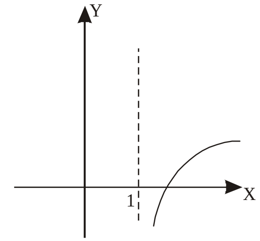
$f(x)=\log(x^2-1)$

Restricciones:

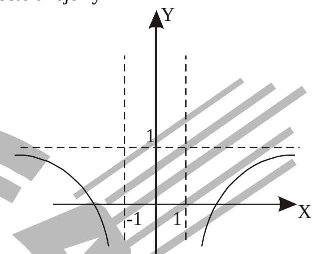
$x^2-1>0\wedge x>1\to x>1\wedge x<1\wedge x>1$

$\Rightarrow x>1$

2° Graficamos para $x>1$



3° Por su función par, entonces reflejamos con respecto al eje "y"



CLAVE: A

8. Resolución:

Piden indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) FALSO

Veamos un contraejemplo

Sea: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\7&2&4\\3&1&0\end{pmatrix}\wedge A^T=\begin{pmatrix}1&7&3\\2&2&1\\3&4&0\end{pmatrix}$ A

$\to A-A^T=\begin{pmatrix}1&2&3\\7&2&4\\3&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&7&3\\2&2&1\\3&4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-5&0\\5&0&3\\0&-3&0\end{pmatrix}$

II) VERDADERO

Sea

$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\to A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$

Entonces: $A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$

III) VERDADERO

$\begin{pmatrix}a&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\b&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+a&5\\a+b&4\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a+2b & 3a+2 \\ b+1 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 & 5 \\ 1+b & 4\end{pmatrix}$$

$a+2b=a+2 \rightarrow b=1$

$3a+2=5 \rightarrow a=1 \Rightarrow a-b=0$

CLAVE: D

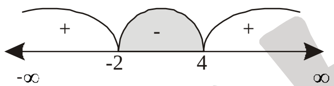
9. Resolución:

Dado:

$(a^2-14)x^2-4x+4a\le 0 \ldots(\alpha)$

$c.s.=[-2;4]$

Sabemos que el conjunto solución es:



Entonces puede ser expresado como:

$(x-4)(x+2)\le 0$

$x^2-2x-8\le 0$

$2x^2-4x-16\le 0 \quad \ldots(\beta)$

Igualando términos de (α) y (β) tenemos:

$a^2-14 \rightarrow a=\pm 4 \wedge 4a=-16$

$\therefore a=-4$

CLAVE: B

10. Resolución:

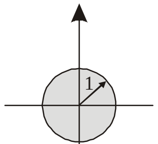
Sean los conjuntos:

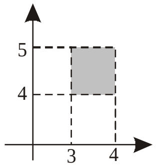
$A=\{(a_1,a_2)\in\mathbb{R}/(a_1,a_2)\in[3;4]\times[4;5]\}\wedge$

$B=\{(b_1,b_2)\in b_1^2+b_2^2\le 1\}$

$A+B=\{\bar{a}+\bar{b}/\bar{a}\in A,\bar{b}\in B\}$

Graficando:





Área $(A+B)=\pi+1$

CLAVE: A

11. Resolución:

Dado el sistema:

$$\begin{cases} x^2-2x-y=-1 \ldots(\alpha) \\ x^2+y^2=1 \ldots(\beta)\end{cases}$$

De (α): $(x-1)^2-y=0 \rightarrow y=(x-1)^2$

Reemplazando (β): $x^2+(x-1)^4=1$

$x=1 \vee x=0$

Entonces: $y=1 \vee y=0$

$\therefore C.S.=\{(1;0),(0;1)\}$

CLAVE: D

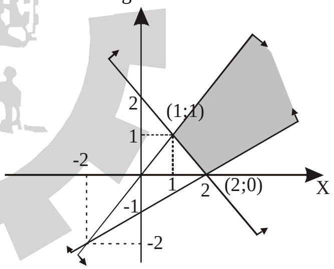
12. Resolución:

Piden minimizar $P(x,y)=10x+20y$

Sujeto a las restricciones:

$$\begin{cases} x+y\ge 2 \\ x-2y\le 2 \\ y\le x\end{cases}$$

Graficando las desigualdades tenemos:



$\Rightarrow P(1;1)=10(1)+20(1)=30$

$\Rightarrow P(2;0)=10(2)+20(0)=20$

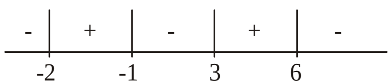
CLAVE: D

13. Resolución:

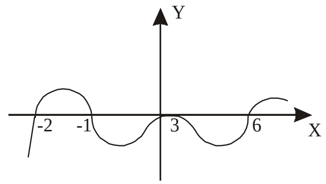
Graficar

$f(x)=(x+2)(x+1)^3(x-3)^6(x-6)^5$

Analizamos:



Graficando



La grafica aproximada es la D

CLAVE: D

14. Resolución:

Condición:

$x^2+bx+c=0$

$x^2+b'x+c'=0$

Tiene una raíz en común si:

$(c-c')^2+(b-b')(bc'-b'c)=0$

Piden determinar las condiciones para que las ecuaciones:

$x^3+px+q=0 \quad \wedge$

$x^2+x+r=0$

Tengan una raíz en común:

Según la condición, si tiene una raíz en común seria siendo "α" la raíz en común.

$\alpha^3+p\alpha+q=0\wedge\alpha^2+\alpha+r=0$

$\downarrow \qquad \rightarrow \alpha^2=-\alpha-r$

$\alpha(-\alpha-r)+p\alpha+q=0\rightarrow\begin{cases}\alpha^2+(r-p)\alpha-q=0\\ \alpha^2+\alpha+r=\alpha\end{cases}$

De la condición tendríamos:

$(q+r)^2+(r-p-1)[(r-p)r+q]=0$

$(q+r)^2+(r-p-1)(r^2-pr+q)=0$

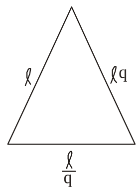
CLAVE: B

15. Resolución:

F F V

CLAVE: D

16. Resolución:

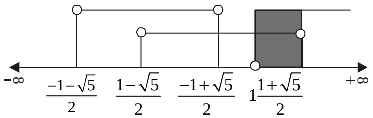


De aquí: $\ell q-\ell<\frac{\ell}{q}<\ell+\ell q$

$\rightarrow q-1<\frac{1}{q}<1+q$

De aquí: $q^2-q-1<0\wedge q^2+q-1>0\wedge q>1$

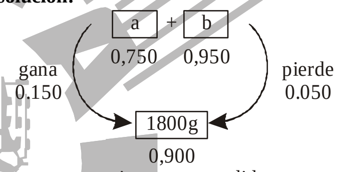
$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<q<\frac{1+\sqrt{5}}{2}\wedge\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<q<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\wedge q>1$



$\therefore 1<q<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

CLAVE: C

17. Resolución:



ganancia aparente = perdida aparente

$0{,}150(a)=0{,}050(b)$

$\frac{a}{1}=\frac{b}{3}$

Como $a+b$ es 1800

$\therefore a=450g;b=1350g$

CLAVE: B

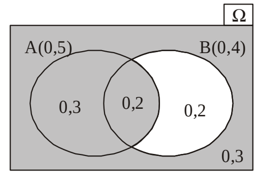
18. Resolución:

$P(A)=0{,}5$

$P(B)=0{,}4$

Si A y B son independientes entonces:

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=(0{,}5)(0{,}4)=0{,}2$



$\therefore P(A\cup B^C)=0{,}3+0{,}2+0{,}3=0{,}8$

CLAVE: D

19. Resolución:

Se tiene la siguiente proporcionalidad según el problema:

$$\frac{5a+130}{13}=\frac{7a+260}{17}=\frac{11a+n}{19}$$

Resolviendo:

$a=-195$

$\therefore n=910$

CLAVE: C

20. Resolución:

$$\overline{5\alpha10\beta}=\overset{\circ}{72}\begin{cases}\overset{\circ}{8}\\ \overset{\circ}{9}\end{cases}$$

Por criterio del 8 $\rightarrow$ $\overline{10\underset{4}{\underset{\downarrow}{\beta}}}=\overset{\circ}{8}$

Por criterio del 9

$$\underbrace{5+\alpha+1+0+\underset{4}{\underset{\downarrow}{\beta}}}=\overset{\circ}{9}$$

$$10+\underset{8}{\underset{\downarrow}{\alpha}}=\overset{\circ}{9}$$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta}=\frac{8}{4}=2$$

CLAVE: C

21. Resolución:

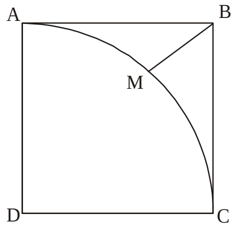
$$E=\frac{1-4sen10\cdot sen70}{2sen10}$$

$$E=\frac{1-2[sen30-sen10]}{2sen10}$$

$$E=\frac{1-2\left[\frac{1}{2}-sen10\right]}{2sen10}=\frac{1-1+2sen10}{2sen10}=1$$

CLAVE: C

22. Resolución:



Datos:

$m\measuredangle ABM=\theta$

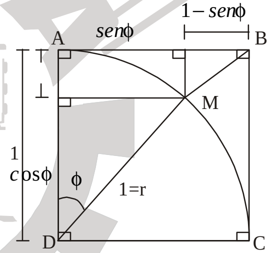
$m\measuredangle ADM=\phi$

ABCD: cuadrado

ADC: sector circular

Consideramos el radio del sector $ADC; r=1$

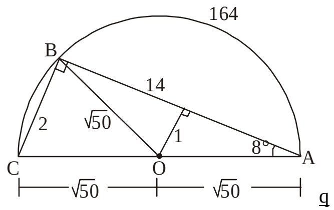
Trazamos $MQ\perp AD$ luego aplicamos resolución de triángulos rectángulos en el $\triangle MDQ$,



$$\therefore\ \tan\phi=\frac{1-\cos\phi}{1-sen\phi}$$

CLAVE: E

23. Resolución:



$$\Rightarrow\frac{167}{180}\pi\cdot\frac{\left(\sqrt{50}\right)^2}{2}-\frac{14\times1}{2}\ \text{k}$$

$$\frac{41\pi\cdot25}{45.9}-7$$

$$\frac{205\pi}{9}-7=64{,}5$$

CLAVE: D

24. Resolución:

$S=9k$

$C=10k$

Reemplazando tenemos:

$$(10k)^2+(9k)^2=2(10k)^3-5(9k)(10k)^2+$$
$$4(9k)^2(10k)-(9k)^2(10k)-(9k)^3-2(9l)(10k)$$

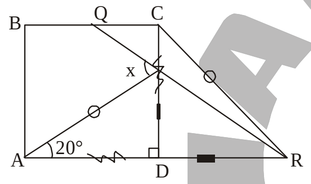
$$181k^2=2000k^3-4500k^3+3240k^3+3240k^3-$$
$$729k^3-180k^2$$

$$361k^2=11k^3\Rightarrow k=\frac{361}{11}$$

$$\therefore C=10k=10\times\frac{360}{11}=\frac{3610}{11}$$

CLAVE: C

25. Resolución:



$\Delta CDR\cong\Delta APD\rightarrow D\widehat{C}R=20°$

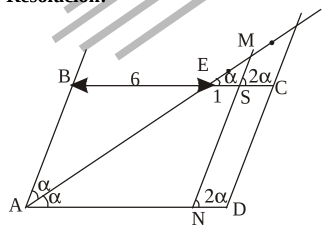
Y como $PD=DR$ es notables → $\Delta P\widehat{R}D=45°$

Finalmente en ΔARP

$x=20+45=65°$

CLAVE: C

26. Resolución:



$BE=AB=6$

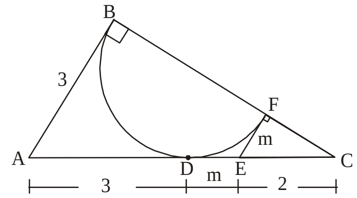
$\overline{ES}=\overline{SC}=\frac{2}{2}=1$

Como: $m\left(M\widehat{A}N\right)=m\left(A\widehat{M}N\right)=\alpha$

$AN=MN=7$

CLAVE: B

27. Resolución:



$AB=AD=3\qquad DE=FE=m$

$\Delta ABC\sim\Delta EFC$

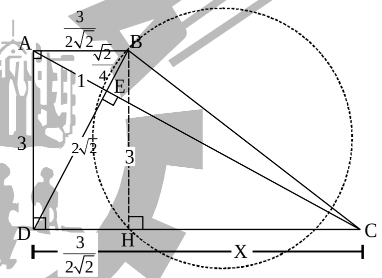
Luego:

$$\frac{3}{m}=\frac{5+m}{2}\Rightarrow m=1$$

Por lo tanto $AC=3+1+2=6$

CLAVE: A

28. Resolución:



$$DE=\sqrt{3^2-1}=2\sqrt{2}$$

$$EB=\frac{\sqrt{2}}{4},\ AB^2=\left(\frac{9\cancel{\sqrt{2}}}{\underset{2}{\cancel{4}}}\right)\left(\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{4}\right)=AB=\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

Por teorema de las secantes

DB x DE = DH x DC

$$\left(\frac{9\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{4}}\right)\left(\cancel{2\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}+x\right)\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$$

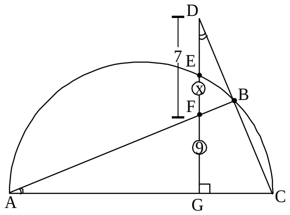
$$\frac{2\sqrt{2}x\cancel{9}^{3}}{\cancel{3}}=\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}+x\right)$$

$$6\sqrt{2}=\frac{3}{2\sqrt{2}}+x$$

$$x=\frac{21\sqrt{2}}{4}$$

CLAVE: A

29. Resolución:



$\Delta_{AFG} \sim \Delta_{GDC}: \frac{AG}{16} = \frac{9}{GC}$

$AGxGC = 144$.............(I)

Pero $EG^2 = AGxGC$.........(II)

(I) a (II) $(9+x)^2 = 144$

$9+x=12$

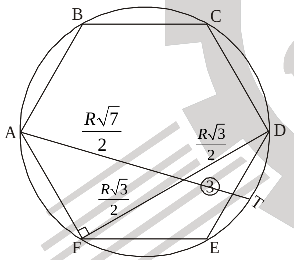
x = 3

CLAVE: C

30. Resolución:

$ap = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

$L_6 = R$



$FD = L_3 = R\sqrt{3} \rightarrow FM = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

$AF = L_6 = R$

En Δ_{AFM}

Pitagoras:

$\rightarrow AM^2 = R^2 + \frac{R^2 3}{4} \Rightarrow AM = \frac{R\sqrt{7}}{2}$

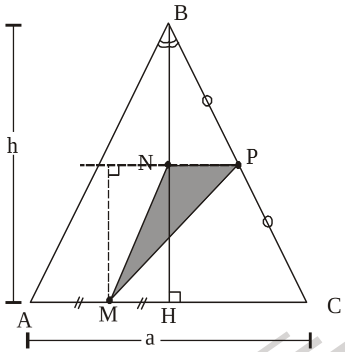
Por el teorema de las cuerdas

$\left(\frac{R\cancel{\sqrt{3}}}{2}\right)\left(\frac{\cancel{R}\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{2}}\right) = \cancel{3}\frac{\cancel{R}\sqrt{7}}{2}$

$R = 2\sqrt{7} \rightarrow AP_6 = (\cancel{2}\sqrt{7})\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \sqrt{21}$

CLAVE: B

31. Resolución:



Dato: $\frac{ah}{2} = 16$

$NP = \frac{AC}{4} = \frac{a}{h}$

$K = \frac{h}{2}$

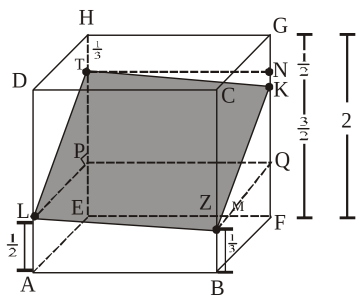
$A_{MNP} = \frac{NPxK}{2}$

$= \frac{\left(\frac{a}{4}\right)\left(\frac{h}{2}\right)}{2} = \left(\frac{ah}{2}\right)\left(\frac{1}{8}\right)$

$S_{MNP} = 16x\frac{1}{8} = 2$

CLAVE: B

32. Resolución:



$GK = LA = \frac{1}{2} \rightarrow TH = MB = \frac{1}{3}$

El cuadrilátero proyecta sobre las caras del triedro trirrectángulo de vértice "F".
Los cuadriláteros TPQK, MZNK y AEFB.
Por el teorema de GUA-DE NALVES

$(S_{LTKM})^2 = (S_{TPQK}) + (S_{MZNK})^2 + (S_{AEFB})^2$

$X^2 = \left(\left(\frac{7}{6}\right)2\right)^2 + \left(\frac{1}{6}x2\right)^2 + \left(2^2\right)^2$

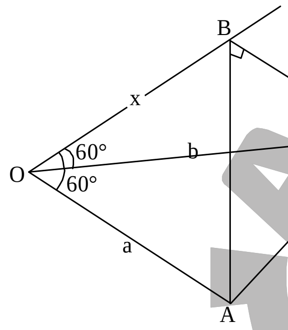
$X^2 = \frac{49}{18} + \frac{1}{9} + 16$

$X = 4,64$

CLAVE: A

33. Resolución:

$a+b=10$ } *DATO*



Por la ley de cosenos

En Δ_{OBA} $BA^2 = x^2 + a^2 - ax$ .... (I)

En Δ_{OBC} $BC^2 = x^2 + b^2 - xb$ ....(II)

En Δ_{OCA}: Pitagoras $a^2 + b^2 = AC^2$ .....(III)

y en Δ_{ABC} por Pitagoras

$AB^2 + BC^2 = AC^2$ .... (*)

(I) (II) y (III) en (*)

$\left(x^2 + \cancel{a^2} - ax\right) + \left(x^2 + \cancel{b^2} - xb\right) = \cancel{a^2} + \cancel{b^2}$

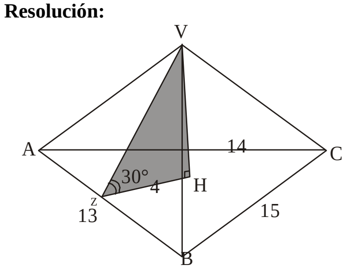
$2x^2 = ax + bx$

$x = \frac{a+b}{2}$

Reemplazando $x = \frac{10}{2} = 5$

CLAVE: C

34. Resolución:



Si las caras están igualmente inclinadas respecto a las base el pie de la altura "H" es incentro del Δ_{ABC}

$\rightarrow \overline{HZ} \rightarrow$ irradio del Δ_{ABC}

$S_{ABC} = \sqrt{21(7)(8)(6)} = 84$

Pero: 21 x HZ = 84 $\rightarrow HZ = 4$

En Δ_{VHZ} notable

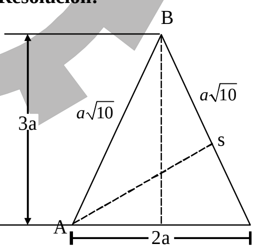
$\rightarrow VH = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

Luego Vol $\frac{S_{ABC}xVH}{3}$

$= \frac{84x\frac{4\sqrt{3}}{3}}{3} = \frac{112\sqrt{3}}{3}$

CLAVE: B

35. Resolución:



As $\frac{3}{5}a\sqrt{10}$

Volumen si gira alrededor de $\overline{BC}$

$V = \pi\frac{\left(\frac{3}{5}a\sqrt{10}\right)^2 xa\sqrt{10}}{3} = \frac{6}{5}\sqrt{10}\pi a^3$

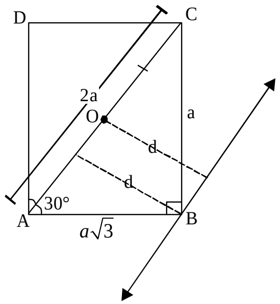
Volumen su gira alrededor de $\overline{AC}$

$V_* = \frac{\pi(3a)^2 x(2a)}{3} = 6\pi a^3$

Mayor volumen será: $6\pi a^3$

CLAVE: C

36. Resolución:



Por Pappus

$$S = \cancel{2}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)x2\left(a+a\sqrt{3}\right)$$

$$2\pi\left(3+\sqrt{3}\right)a^2$$

CLAVE: E

37. Resolución:

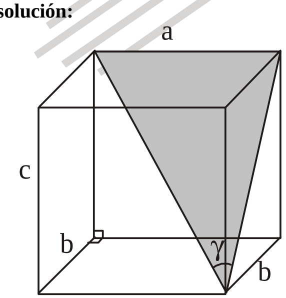
$$f(x) = arcsenx + \arccos x + arctg\left(\frac{1}{|x|+1}\right)$$

$$\frac{\pi}{2}+\left[\arctan\left(\frac{1}{2}\right);\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\left[\frac{\pi}{2}+\arctan\left(\frac{1}{2}\right);\frac{3\pi}{4}\right]$$

CLAVE: C

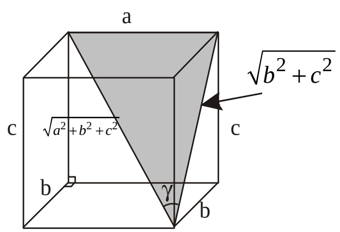
38. Resolución:



Dato:

$$\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{1}{3}$$

En la región sombreada aplicamos el teorema de cosenos:



$$\cos\gamma = \frac{\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)^2+\left(\sqrt{b^2+c^2}\right)^2-a^2}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2}}$$

Efectuando tenemos:

$$\cos\gamma = \frac{2\left(b^2+c^2\right)}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{b^2+c^2}{2\left(b^2+c^2\right)} = \frac{1}{3}$$

Piden:

$$Versen\gamma = 1-\cos y = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

CLAVE: D

39. Resolución:

$$16sen^5x = Asenx + B\left(3senx-4sen^3x\right)+$$
$$c\left(16sen^5x-20sen^3x+5senx\right)$$

$$=\underbrace{16c}_{16}sen^5x+\underbrace{\left(-4B-20C\right)}_{0}sen^3x+\underbrace{\left(A+3B+5C\right)}_{0}senx$$

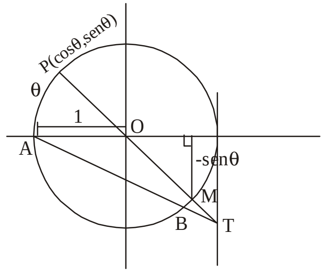
Entonces:

$$C=1\ ;\ \ B=-5\ y\ A=10$$

$$\Rightarrow 10+2(-5)+1=1$$

CLAVE: C

40. Resolución:



$$M\ es\ opuesto \Rightarrow M = 1$$

$$\tan\theta \Rightarrow A\Delta AMT = \Delta AOT - \Delta AOM$$

$$\frac{1x\tan\theta}{2}-\frac{1x-sen\theta}{2}$$

$$\Delta AMT = \frac{1}{2}\left(\tan\theta+sen\theta\right)$$

CLAVE: D

Departamento de Publicaciones ALFA
Lima, 11 de agosto del 2010