Admisión 2013-II

MATEMATICA

MATEMÁTICA PARTE 1

01. Dadas las siguientes proposiciones:

I. Si A es una matriz cuadrada tal que $A^2 = A$, entonces $A^K = A$, $\forall K \in \mathbb{N}$.

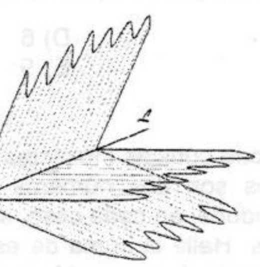
II. Si B es simétrica, entonces $-B^2$ es antisimétrica.

III. C es matriz cuadrada tal que $C^K = 0$ para algún $K \in \mathbb{N}$, entonces $I + \sum_{i=1}^{K} C^i$ es inversible.

Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) I y II
E) I y III

02. La siguiente figura da la idea de tres planos interceptándose según la recta $\measuredangle$. ¿Cuál(es) de los sistemas de ecuaciones dados representa a la figura dada?



I. $\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ -x + 5y + 2z &= 4 \\ x + 8y + z &= 5 \end{aligned}$

II. $\begin{aligned} x - y + 3z &= -2 \\ -2x + 2y - 6z &= -4 \\ -x + y - 3z &= 2 \end{aligned}$

III. $\begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \\ -x + 3y - z &= 1 \\ x - 2y + 2z &= 2 \end{aligned}$

A) Solo I
B) I y III
C) Solo III
D) I, II y III
E) Solo II

03. Sea la sucesión (a_k), donde

$$a_k = k.\text{Ln}\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Entonces podemos afirmar que:

A) (a_k) converge a 1
B) (a_k) converge a $\text{Ln}\left(1+\frac{1}{k}\right)$
C) (a_k) converge a Ln 2
D) (a_k) converge a 0
E) (a_k) no converge

04. Sabiendo que se cumple $abc = 0$
$a+b+c = 1$

Halle el valor de

$$K = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$$

A) 0
B) 1/6
C) 1/3
D) 1/2
E) 1

05. Un sistema de n ecuaciones con n incógnitas se puede expresar como Ax = b, donde A es una matriz cuadrada de orden n x n, b es una matriz de orden n x 1 y las incógnitas son los elementos de la matriz x de orden n x 1. Si S es el conjunto solución del sistema Ax = b, entonces podemos afirmar que:

A) $S = \phi$ o S es infinito.
B) Los elementos de S pueden ser hallados por la regla de Cramer.
C) Si los elementos de b son mayores que 0, entonces $S = \phi$ o S es un conjunto unitario.
D) Si A es inversible, entonces S es finito.
E) Si los elementos de b son todos iguales a cero, entonces no podemos utilizar la regla de Cramer para hallar los elementos de S.

06. Sean A, B conjuntos del mismo universo U. Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. Card $(A \cup B)$ = Card (A) + Card (B) – Card $(A \cap B)$

II. Card $(P(A \cup B))$ = Card $(P(A))$ + Card $(P(B))$ – Card $(P(A \cap B))$
donde P (A) es el conjunto potencia de A.

III. Si Card $(A \cap B) = 0$,
entonces $A = \phi$ o $B = \phi$.

A) V V V
B) V V F
C) V F F
D) F F V
E) F F F

07. Encuentre el conjunto solución de la ecuación

$$x^8 - 257x^4 + 256 = 0.$$

A) $\{\pm 2,\ \pm 2i,\ \pm 4i,\ \pm 4\}$
B) $\{\pm 4,\ \pm 4i,\ \pm 1,\ \pm i\}$
C) $\{\pm 4,\ \pm 2i,\ \pm 2,\ \pm i\}$
D) $\{\pm 1,\ \pm i,\ \pm 3,\ \pm 3i\}$
E) $\{\pm 3,\ \pm 3i,\ \pm 4,\ \pm 4i\}$

08. Sea $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ una función, donde $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números racionales, tal que

I. $f(r+s) = f(r) + f(s)$
II. $f(rs) = f(r)\cdot f(s)$
III. $f(1) = 1$

Señale, la alternativa que permite la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F),

I. $f(n) = n,\ \forall n \in \mathbb{N}$
II. $f(r) = r,\ \forall r \in \mathbb{Q}$
III. $f(n^m) = m^n,\ \forall m,\ n \in \mathbb{N}$

A) V V V
B) V V F
C) V F F
D) F F V
E) F F F

09. La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ es inyectiva en $[2;+\infty\rangle$ y $g(x) = ax^2 + bx + d$ es inyectiva en $\langle -\infty;\ 2]$. Halle el valor de 4a + b, sabiendo que $a \neq 0$.

A) – 2
B) – 1
C) 0
D) 1
E) 2

10. El valor numérico de

$$P(x) = x^5 + (3 - 3\sqrt{3})x^4 - 9\sqrt{3}\ x^3 + 5x + 7\sqrt{3}$$

para $x = 3\sqrt{3}$ es:

A) $20\sqrt{3}$
B) $22\sqrt{3}$
C) $24\sqrt{3}$
D) $26\sqrt{3}$
E) $28\sqrt{3}$

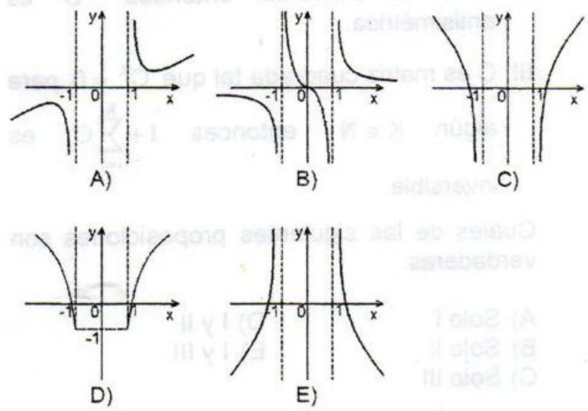
11. Dada la ecuación

$$(\log_2 2x)^2 + (\log_2 0{,}5x)^2 + (\log_2 0{,}25x)^2 = 5$$

El menor valor de sus raíces es:

A) 1
B) $\sqrt[3]{2}$
C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}$
E) 3

12. Señale la gráfica que mejor representa a la función $f(x) = y$ en su dominio.



13. Consideremos la expresión
$E = 0{,}3\hat{a} + 0{,}33\hat{a} + 0{,}333\hat{a}$
Determine el valor de **a** de manera que E está lo más próximo posible a 1,0740.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 6
E) 9

14. Las raíces cúbicas inexactas de dos enteros positivos son dos números consecutivos y sus residuos, en cada caso, son los máximos posibles. Halle la suma de estos números si la diferencia de sus residuos es 54.

A) 1 416
B) 1 524
C) 1 727
D) 1 836
E) 1 976

15. Sean $a_1, a_2 ..., a_n \in \langle 0,\infty\rangle$ cualesquiera, $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ arbitrario y $M_A(n)$, $M_G(n)$ y $M_H(n)$ su media aritmética, media geométrica y media armónica respectivamente.
Indique la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F), en el orden dado:

I. $M_G(n) = \sqrt[n]{M_A(n)\ M_H(n)},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$
II. $M_A(n)\ M_H(n) = a_1 a_2 ... a_n,\ \forall\ n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$
III. $M_A(2) - M_G(2) = \dfrac{(a_1 + a_2)^2}{4(M_A(2) + M_G(2))}$

A) V V V
B) V F F
C) F V F
D) F F V
E) F F F

16. Un juego de azar (tipo lotería) consiste en elegir 5 números diferentes de los primeros 30 números naturales. Cada persona que participa en este juego compra 26 jugadas diferentes. Calcule la cantidad mínima de jugadores que se necesita para ganar el juego.

A) 2 349 D) 6 264
B) 3 915 E) 7 047
C) 5 481

17. Si los coeficientes del primer y último término del desarrollo del binomio $(3a^2x^3 + ay^4)^{20}$ son iguales (a > 0), determine el coeficiente del décimo octavo término.

A) $\frac{190}{3^{21}}$ D) $\frac{380}{3^{20}}$
B) $\frac{380}{3^{21}}$ E) $\frac{380}{3^{19}}$
C) $\frac{190}{3^{20}}$

18. Determine la cantidad de números de cuatro cifras en base 8, que contienen al número tres.

A) 1 520 D) 1 526
B) 1 522 E) 1 528
C) 1 524

19. Al multiplicar un número A de cuatro cifras por 999 se obtiene un número que termina en 5352. Calcule la suma de las cifras del número A.

A) 18 D) 21
B) 19 E) 22
C) 20

20. Considere el mayor de los números N cuya descomposición en sus factores primos de una cifra es $2^a.5^3.m^u.3^r$, sabiendo que cuando se divide por 40 se obtiene otro número de 54 divisores y además a + u + r < 9. Calcule la suma de sus cifras.

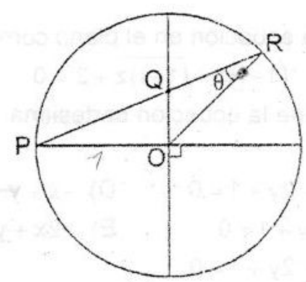
A) 9 D) 15
B) 10 E) 18
C) 12

MATEMÁTICA PARTE 2

21. El área de un triángulo cuyos vértices son $A(x,y)$, $B(3,4)$ y $C(5,-1)$, es $7u^2$.
Además $y + 3x = 4$ y $x > -2$.
Calcule $x + y$.

A) 4 D) 7
B) 5 E) 8
C) 6

22. En la circunferencia trigonométrica adjunta, determine: $\dfrac{\text{área del } \Delta POR}{\text{área del } \Delta RQO}$.



A) $\csc(2\theta)+1$ D) $\sec(2\theta)+1$
B) $\csc(\theta)+1$ E) $\sec(2\theta)+2$
C) $\sec(\theta)+1$

23. Sean f(x) = $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, g(x) = sen (2x), para $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Entonces podemos afirmar que:

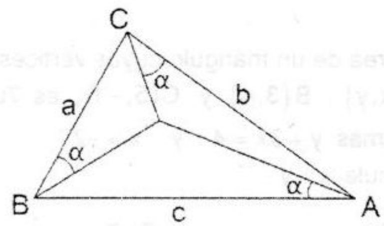
A) $f(x) > g(x)$
B) $f(x) \geq g(x)$
C) $f(x) < g(x)$
D) $f(x) \leq g(x)$
E) $f(x) \leq g(x)$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ y $g(x) < f(x)$, $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

24. Calcule el resultado, simplificado, de la siguiente expresión

$E = 2^5 \text{sen}5° \,\text{sen}10° \,\text{sen}50° \,\text{sen}70° \,\text{sen}85° \,\text{sen}110° \,\text{s}$

A) $\frac{1}{4}$ D) 2
B) $\frac{1}{2}$ E) 4
C) 1

25. En la figura:



Si $a = 3$, $b = 25$, $c = 26$, $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{m}{n}$, donde m y n son primos entre si, calcule $m + n$.

A) 727
B) 728
C) 729
D) 730
E) 731

26. Dada la ecuación en el plano complejo,

$$(1-i)z + \overline{(1-i)z} + 2 = 0,$$

determine la ecuación cartesiana.

A) $2x + 2y + 1 = 0$
B) $x + y + 1 = 0$
C) $2x - 2y + 1 = 0$
D) $-x + y + 1 = 0$
E) $-2x + y + 2 = 0$

27. Halle el dominio de la función

$$f(x) = 17 \operatorname{arc\,sec}\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

A) $\left\langle -\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, \infty\right\rangle$

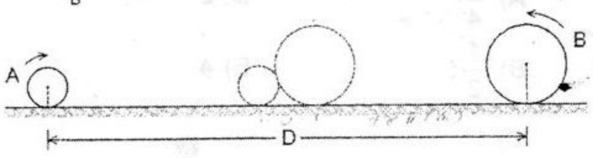
B) $\left\langle -\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, \infty\right\rangle$

C) $\left\langle -\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right\rangle$

D) $\left\langle -\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right\rangle$

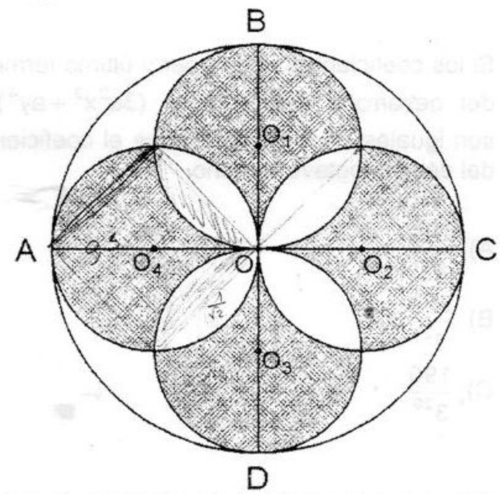
E) $\left\langle -\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right\rangle$

28. En la figura mostrada, las ruedas A y B dan 2n y n vueltas respectivamente $(n > 2)$ desde su posición inicial, hasta el instante en que llegan a tocarse; además, $r_A = 1\,u$ y $r_B = 9\,u$. Calcule D en u.



A) $10\,n\pi$
B) $15\,n\pi + 1$
C) $20\,n\pi + 2$
D) $22\,n\pi + 4$
E) $22\,n\pi + 6$

29. En la figura: O, O_1, O_2, O_3 y O_4 son centros de circunferencias, donde A, B, C y D son puntos de tangencia. Si AO = 1cm, entonces el área de la superficie sombreada es:



A) 1,85
B) 1,90
C) 1,95
D) 2,00
E) 2,14

30. De un recipiente lleno de agua que tiene la forma de un cono circular recto de 20 cm de radio y 40 cm de altura, se vierte el agua a un recipiente cilíndrico de 40 cm de radio, entonces a qué altura, en cm, se encuentra el nivel del agua en el recipiente cilíndrico.

A) 5
B) $\dfrac{10}{3}$
C) $\dfrac{5}{2}$
D) 2
E) $\dfrac{5}{3}$

31. En un tronco de prisma triangular oblicuo, la longitud del segmento que une los baricentros de sus bases es 16 cm. Calcule la longitud de la menor arista (en cm), si éstas están en razón de 3, 4 y 5.

A) 4
B) 8
C) 12
D) 16
E) 48

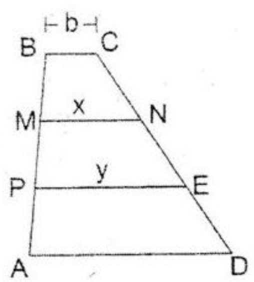
32. En un semicírculo cuyo radio mide R cm, se inscribe un triángulo rectángulo ABC ($\overline{AC}$ diámetro) tal que al girar alrededor de la hipotenusa genera un sólido, cuyo volumen es la mitad de la esfera generada por dicho semicírculo. Entonces el área de la superficie esférica es al área de la región triangular ABC como:

A) $\frac{8}{3}\pi$
B) 3π
C) 4π
D) $\frac{16}{3}\pi$
E) 8π

33. Si el perímetro del desarrollo de la superficie lateral del octaedro mide 30 u; determine la superficie lateral del poliedro mencionado.

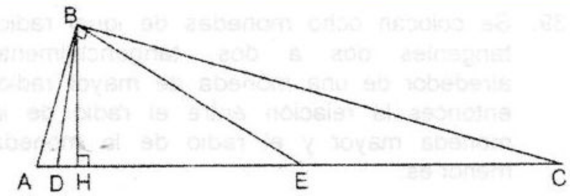
A) $14\sqrt{3}\ u^2$
B) $16\sqrt{3}\ u^2$
C) $18\sqrt{3}\ u^2$
D) $20\sqrt{3}\ u^2$
E) $22\sqrt{3}\ u^2$

34. Se da un trapecio en el cual la base menor mide b. Si la base mayor es 8 veces la base menor (figura), y se divide el trapecio en 3 trapecios semejantes por dos paralelas a las bases, halle el valor de x (la menor paralela).



A) 2b
B) 2,5b
C) 3b
D) 1,5b
E) 3,5b

35. En la figura, el triángulo ABC recto en B, $\overline{BH}$ es la altura, $\overline{BD}$ es la bisectriz del ángulo ABH y $\overline{BE}$ es la bisectriz del ángulo HBC. Si AB = 7u y BC = 24u. Calcule el valor del segmento DE (en u).



A) 4
B) 5
C) 6
D) 8
E) 9

36. Se tiene un triángulo equilátero ABC inscrito en una circunferencia de radio r = 6 cm, si M es el punto que divide al arco $\overset{\frown}{AB}$ en partes iguales $(M \neq C)$, entonces el área de la región triangular AMB en cm^2 es:

A) $8\sqrt{3}$
B) $9\sqrt{3}$
C) $10\sqrt{3}$
D) $11\sqrt{3}$
E) $12\sqrt{3}$

37. En un triángulo ABC, AB = 4 u, BC = 6 u. Se traza $\overline{DE}$ paralela a $\overline{BC}$ donde los puntos D y E pertenecen a los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, de modo que el segmento $\overline{BE}$ sea bisectriz del ángulo B. Calcule el valor de BD (en u).

A) 1,8
B) 2,0
C) 2,2
D) 2,4
E) 2,8

38. Dos segmentos paralelos en el plano tienen longitudes 3cm y 1cm respectivamente. Si la distancia entre esos segmentos es de 1cm, calcule el radio de la circunferencia que pasa por los extremos de dichos segmentos.

A) $\sqrt{\frac{3}{2}}$
B) $\sqrt{\frac{5}{2}}$
C) $\sqrt{\frac{7}{2}}$
D) $\sqrt{\frac{9}{2}}$
E) 2,5

39. Se colocan ocho monedas de igual radio, tangentes dos a dos, tangencialmente alrededor de una moneda de mayor radio, entonces la relación entre el radio de la moneda mayor y el radio de la moneda menor es:

A) $\dfrac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}-2$ D) $\dfrac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}-\dfrac{1}{4}$

B) $\dfrac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}-1$ E) $\dfrac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}-\dfrac{1}{8}$

C) $\dfrac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}-\dfrac{1}{2}$

40. ABCD - EFGH es un hexaedro regular. Si O es el centro de ABCD y R es punto medio de $\overline{HG}$. Halle la medida del diedro que forman el plano BRD y la cara EFGH.

A) $\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{2}\right)$ D) $\operatorname{Arctan}\left(3\sqrt{2}\right)$

B) $\operatorname{Arctan}(2)$ E) $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{7\sqrt{2}}{2}\right)$

C) $\operatorname{Arctan}\left(2\sqrt{2}\right)$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

SEGUNDA PRUEBA
MATEMATICA

CLAVES

1.	**D**	11.	**B**	21.	**C**	31.	**C**
2.	**A**	12.	**B**	22.	**C**	32.	**C**
3.	**A**	13.	**E**	23.	**B**	33.	**C**
4.	**B**	14.	**C**	24.	**A**	34.	**A**
5.	**D**	15.	**E**	25.	**A**	35.	**C**
6.	**C**	16.	**C**	26.	**B**	36.	**B**
7.	**B**	17.	**E**	27.	**B**	37.	**D**
8.	**B**	18.	**D**	28.	**E**	38.	**E**
9.	**C**	19.	**C**	29.	**D**	39.	**B**
10	**B**	20.	**E**	30.	**B**	40.	**C**

*Departamento de Publicaciones **ALFA***
Lima del 2013